



2.2 函数的基本性质

实例考察

已知二次函数 $f(x) = x^2$ (图 2-8), 反比例函数 $f(x) = \frac{2}{x}$ (图 2-9), 请你通过计算, 得到 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系, 并通过观察它们的图像, 指出函数的图像特征.

二次函数 $f(x) = x^2$

定义域 D 为 _____.

$f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$,

得到 $f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$,

得到 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

函数的图像特征: _____.

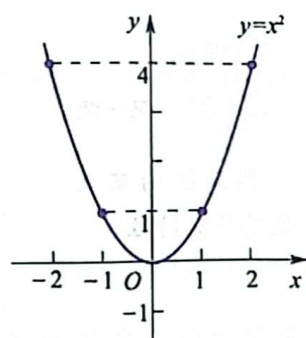


图 2-8

反比例函数 $f(x) = \frac{2}{x}$

定义域 D 为 _____.

$f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$,

得到 $f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

$f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$,

得到 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

函数的图像特征: _____.

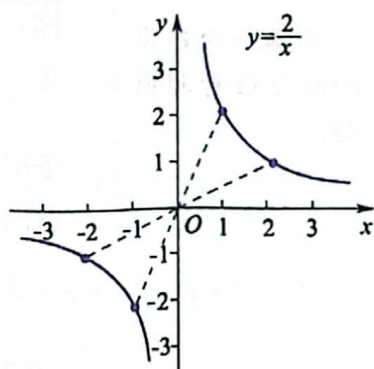


图 2-9



函数的奇偶性

我们知道, 二次函数 $f(x)=x^2$ 的图像 (图 2-8) 关于 y 轴成轴对称图形, 这种对称性在数值上也能反映出来. 通过计算, 得到

$$f(-1)=f(1), f(-2)=f(2)$$

事实上, 对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

也就是说, 函数 $f(x)=x^2$ 具有 $f(-x)=f(x)$ 的特性.

想一想

偶函数的定义域有什么特性?

一般地, 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D . 如果对于任意的 $x \in D$, 都有

$$f(-x)=f(x)$$

我们就把函数 $y=f(x)$ 称为偶函数.

想一想

偶函数的图像一定是轴对称图形.

如果函数 $y=f(x)$ ($x \in D$) 是偶函数, 那么函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称. 反过来, 如果函数 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 那么这个函数一定是偶函数.

对于反比例函数 $f(x)=\frac{2}{x}$, 我们知道, 它的图像 (图 2-9) 关于原点成中心对称, 这种对称性在数值上也能反映出来. 对于任意的 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 都有

$$f(-x)=\frac{2}{-x}=-\frac{2}{x}=-f(x)$$

也就是说, 函数 $f(x)=\frac{2}{x}$ 具有 $f(-x)=-f(x)$ 的特性.

想一想

奇函数的定义域有什么特性?

一般地, 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D . 如果对于任意的 $x \in D$, 都有

$$f(-x)=-f(x)$$

我们就把函数 $y=f(x)$ 称为奇函数.





如果函数 $y=f(x)$ ($x \in D$) 是奇函数, 那么函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点成中心对称图形. 反过来, 如果函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点成中心对称图形, 那么这个函数一定是奇函数.

一个函数是奇函数或偶函数, 我们就说这个函数具有奇偶性. 根据奇函数和偶函数的定义, 可以得到: 函数的定义域关于原点对称是函数具有奇偶性所必须具备的条件.

如果一个函数既非奇函数, 又非偶函数, 我们就把这个函数称为非奇非偶函数.

例题解析

例 1 利用定义, 判断下列函数的奇偶性:

- (1) $f(x)=2x^4-1$;
- (2) $f(x)=-3x$;
- (3) $f(x)=x-2$;
- (4) $f(x)=x^2-2x$, $x \in [-2, 3]$.

解 (1) 函数 $f(x)=2x^4-1$ 的定义域为 \mathbf{R} , 对于定义域内的任意一个值 x , 都有

$$f(-x)=2(-x)^4-1=2x^4-1=f(x)$$

所以函数 $f(x)=2x^4-1$ 是偶函数.

(2) 函数 $f(x)=-3x$ 的定义域为 \mathbf{R} , 对于定义域内的任意一个值 x , 都有

$$f(-x)=-3(-x)=3x=-f(x)$$

所以函数 $f(x)=-3x$ 是奇函数.

(3) 函数 $f(x)=x-2$ 的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$.

取 $x=1$, 有

$$f(-1)=-1-2=-3, f(1)=1-2=-1$$

因此, 函数 $f(x)$ 不是偶函数.

同样, 由于 $f(-1) \neq -f(1)$, 因此, 函数 $f(x)$ 也不是奇函数.

所以, 函数 $f(x)=x-2$ 是非奇非偶函数.

(4) 函数 $f(x)=x^2-2x$, $x \in [-2, 3]$ 的定义域为

$$D=[-2, 3]$$

提示

判断函数的奇偶性, 必须首先求出函数的定义域 D .

提示

函数的奇偶性是函数的整体性质, 确定函数是非奇非偶函数, 只需举一个反例, 如例 1 中第 (3) 小题; 若函数的定义域关于原点对称, 可以直接指出函数是非奇非偶函数, 如例 1 中的第 (4) 小题.



由于定义域 D 不关于原点对称, 所以函数 $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [-2, 3]$ 是非奇非偶函数.

例 2 如图 2-10 所示, 已知奇函数 $y = f(x)$ 在 y 轴右边部分的图像, 试把函数 $y = f(x)$ 的图像画完整.

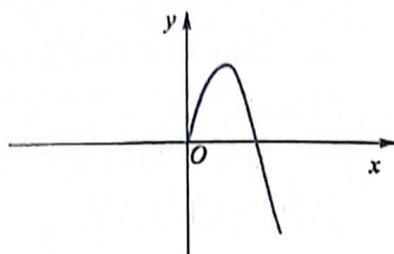


图 2-10

解 因为函数 $y = f(x)$ 是奇函数, 所以它的图像关于原点对称, 利用对称性画出函数的另一半图像. 具体方法如下:

第一步, 如图 2-11a 所示, 在 y 轴右边的图像上适当取几个点 O, A, B, C (一般取能够反映主要特征的点);

第二步, 画出这些点关于原点的对称点 O, A', B', C' , 用一条光滑曲线顺次联结这些对称点, 就得到了 $y = f(x)$ 的完整图像, 如图 2-11b 所示.

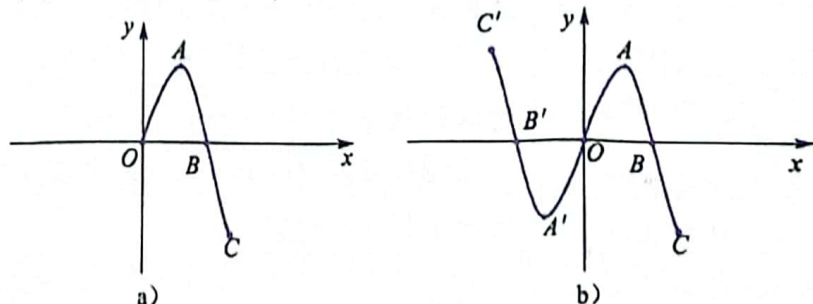


图 2-11

反映主要特征的点一般是指: 与坐标轴的交点、最高点和最低点 (可以是某一段曲线上的) 等.

知识巩固 1

1. 利用定义, 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = 3x^2 - 7$;

(2) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2x$;

(3) $f(x) = -2x + 3$;

