

1.3 等比数列

实例考察

在现实生活中，我们还会碰到一些特殊数列，它们的项的变化也是有规律的，但不是等差数列。

汽车价值 一辆汽车（图1-4）购买时价值是20万元，每年的折旧率是10%（就是说这辆汽车每年减少它上一年价值的10%），那么这辆汽车从购买当年算起，8年之内，每年的价值（单位：万元）组成的数列

$$20, 20 \times 0.9, 20 \times 0.9^2, \dots, 20 \times 0.9^7 \quad ①$$

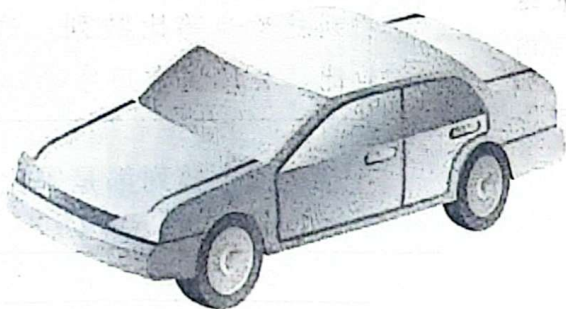


图1-4



提示

由于算上了这1小时开始的时候第一个收到短信的人，所以这个数列共有21项。

一条短信 某人用3分钟将一条短信发给3个人，这3个人又用3分钟各自将这条短信发给未收到的3个人（图1-5）。如此继续下去，1小时内收到此短信的人，按收到短信的次序排成的数列

$$1, 3, 3^2, 3^3, \dots, 3^{20} \quad ②$$

倍数 从5开始，每次乘以5，可以得到数列

$$5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, \dots \quad ③$$

常数 由无穷多个常数 a ($a \neq 0$) 组成的常数数列

$$a, a, a, a, a, \dots \quad ④$$



图1-5



等比数列基本知识

对于上面的数列，我们可以发现：

数列①，从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于0.9.

数列②，从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于3.

数列③，从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于5.

数列④，从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于1.

也就是说，这些数列有一个共同特点：从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数.



提示

“ $\{a_n\}$ 是等比数列”也可表述为：数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ ($q \neq 0$, q 是常数).

一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个非零常数，这样的数列就称为等比数列，这个常数称为等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示 ($q \neq 0$).

上面的四个数列都是等比数列，它们的公比依次是_____，_____，_____.



提示

对于任意两个非零实数 a 和 b ，只有当 a 和 b 同号时，它们之间才存在等比中项 G ，且 $G = \pm \sqrt{ab}$.

一般地，如果 a, G, b 成等比数列，则

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

即

$$G^2 = ab$$

这时， G 称为 a 与 b 的等比中项.

容易看出，在一个等比数列中，从第2项起，每一项（有穷数列的末项除外）都是它的前一项与后一项的等比中项.

下面我们来讨论等比数列的通项公式.

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，首项是 a_1 ，公比是 q . 根据等比数列的定义，可以得到

$$\frac{a_2}{a_1} = q$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q$$



$$\frac{a_4}{a_3} = q$$

...

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

把上述 $n-1$ 个式子的两边分别相乘, 就能得到

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$$

即

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

当 $n=1$ 时, 上面的等式也成立, 由此得到, 等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

例题解析

例1 下列数列是否为等比数列? 若是, 写出其首项及公比.

(1) 5, 25, 125, 625, 3 125;

(2) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

解 (1) 是等比数列, $a_1=1, q=5$;

(2) 是等比数列, $a_1=-\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{2}$.

例2 求出下列等比数列中的未知项:

(1) 2, a , 8;

(2) 4, b , $c, \frac{1}{2}$.

解 (1) 由题意得

$$a^2 = 16$$

即

$$a=4 \text{ 或 } a=-4$$

$$(2) \text{ 由题意得 } \begin{cases} \frac{b}{4} = \frac{c}{b} \\ \frac{c}{b} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

解方程组, 得

$$b=2, c=1$$





提示

一般地,在通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 中,若已知 a_1 , q , n , a_n 这 4 个量中的 3 个,总能求出第四个量.

例 3 求等比数列 $-5, 10, -20, 40, \dots$ 的通项公式和第 10 项.

解 因为 $a_1 = -5$, $q = \frac{10}{-5} = -2$, 所以

$$a_n = -5(-2)^{n-1}$$

因此

$$a_{10} = (-5)(-2)^9 = 2\,560$$

例 4 在等比数列 $\{a_n\}$ 中:

(1) $a_1 = 4$, $q = 3$, $a_n = 324$, 求项数 n ;

(2) $q = 2$, $a_5 = 48$, 求 a_1 和通项公式.

解 (1) 因为 $a_1 = 4$, $q = 3$, $a_n = 324$, 所以

$$a_n = 4 \times 3^{n-1} = 324$$

即

$$3^{n-1} = 3^4$$

$$n-1 = 4$$

解得

$$n = 5$$

(2) 因为 $q = 2$, $a_5 = 48$, $n = 5$, 所以

$$a_1 \cdot 2^{5-1} = 48$$

解得

$$a_1 = 3$$

因此, 这个数列的通项公式是

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

例 5 培育一种稻谷新品种, 第 1 代得种子 100 粒, 如果以后由每粒新种又可得 100 粒下一代种子, 到第 5 代可以得到新品种种子多少粒?

解 依题意, 逐代的种子数是一个等比数列, 且 $a_1 = 100$, $q = 100$, 由此可得

$$a_5 = 100 \times 100^{5-1} = 100^5 = 10^{10} \text{ (粒)}$$

例 6 一家连锁超市集团正在拓展市场, 计划开设连锁店数量成等比数列增长. 2020 年共有 30 家连锁店, 如果 2022 年要达到 270 家店, 那么 2021 年要新开连锁店多少家?

解 因为开设连锁店数量成等比数列, 所以 2021 年连锁店的总数是 30 和 270 的等比中项, 设其为 a , 则

$$a = \pm \sqrt{30 \times 270} = \pm 90$$

因为连锁店数量不能为负, 所以舍去 -90 . 由此得 2021 年连锁店总数为 90 家. 因为 2020 年已经有连锁店 30 家, 所以 2021 年要新开连锁店 60 家.

